UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE FARMACIA Y BIOANÁLISIS
PROF. JESÚS E. BARRIOS P.

GUÍA BÁSICA DE MATEMÁTICA

OBJETIVOS

Que los alumnos:

- ✓ Reconozcan la utilidad de las estructuras matemáticas para el cálculo y modelado de problemas afines a su futura actividad profesional.
- ✓ Adquieran herramientas que permitan utilizar las estructuras matemáticas, luego de reconocidas su utilidad.
- ✓ Conozcan aplicaciones concretas de las matemáticas a las ciencias de la salud.
- ✓ Manejen el concepto de función en una o más variables, reconociendo sus características y propiedades.
- ✓ Conceptúen la idea de límite funcional y adquieran la habilidad para su cálculo.
- ✓ Calculen derivadas, aplicando este concepto a problemas de aplicación.
- ✓ Adquieran el concepto de integral y puedan utilizarlo para resolver diferentes aplicaciones**.**

CONTENIDO

TEMAS

1.- Expresiones Logarítmicas y Exponenciales.

2.- Trigonometría. Ecuaciones Trigonométricas.

3.- Función, Límite y Continuidad.

4.- La Derivada. Aplicaciones.

5.- La Integral. Aplicaciones.

Tema 1: EXPRESIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

Definición de Logaritmo

El logaritmo de un número, en una base dada $\boldsymbol{a}$, es el exponente al cual se debe elevar la base $\boldsymbol{a}$ para obtener el número $\boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{log_a\, x = y \;\leftrightarrow\; a^y = x \;\; para \;\; a > 0, a \neq 1 \;\; y \;\; x > 0}$$

Esto significa que una potencia se puede expresar como logaritmo, y un logaritmo se puede expresar como potencia.

EJEMPLOS

$log_3 81 = 4 \leftrightarrow 3^4 = 81$	$log_4 1 = 0 \leftrightarrow 4^0 = 1$	$log_{10} 0{,}001 = -3 \leftrightarrow 10^{-3} = 0{,}001$
$log_e e^{12} = 12 \leftrightarrow e^{12} = e^{12}$	$log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	$log_4\left(\frac{1}{64}\right) = -3 \leftrightarrow (4)^{-3} = \frac{1}{64}$

Propiedades (Logaritmos)

1) $\log_a(1) = 0$	6) $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$
2) $\log_a(a) = 1$	7) $\log_{10} x = \log x$ **Logaritmo Decimal**
3) $\log_a(x) = y,\;\; x > 0$	8) $\log_e x = \ln x$ **Logaritmo Neperiano o Natural**
4) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$	9) $\log_U V = \frac{\log_{\mathbf{bd}} V}{\log_{\mathbf{bd}} U}$ $\quad\mathbf{bd = 10}$ ó $\mathbf{e}$ (=2,71...)
5) $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$	10) $\mathrm{cologx} = -\log x$ Cologaritmo

EJERCICIOS RESUELTOS

$log_{10} 1 = 0$	$log_2(8) = log_2(2^3) = = 3 \cdot log_2(2) = 3 \cdot 1 = 3$
$log_{10} 90 = log\, 9 \cdot 10 = log\, 9 + log\, 10 = = 0{,}95 + 1 \cong 1{,}95$	$log(e^{-12}) = -12 \cdot log\, e \cong -12 \cdot 0{,}43 = -5{,}21$
$log\left(\frac{3}{2}\right) = log\, 3 - log\, 2 \cong 0{,}48 - 0{,}30 = 0{,}18$	$ln\left(\frac{1}{2}\right) = ln\, 1 - ln\, 2 \cong 0 - 0{,}69 = -0{,}69$
$log_3 2 = \frac{log\, 2}{log\, 3} \cong \frac{0{,}30}{0{,}48} = \frac{5}{8} = 0{,}625$	$log_3 5 = \frac{ln\, 5}{ln\, 3} \cong \frac{1{,}61}{1{,}10} = 1{,}46$
$log \sqrt[3]{100} = log\left((10^2)^{\frac{1}{3}}\right) = log\, 10^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot log\, 10 = \frac{2}{3}$	$ln\sqrt{e^3} = ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2} \cdot ln\, e = \frac{3}{2}$

Propiedades (Potencias)

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a \quad n \text{ veces}$	$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Ecuaciones Logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas ecuaciones en la que la incógnita aparece afectada por un logaritmo. Ejemplos (resueltos usando la definición):

1) $\boldsymbol{log_2 x = 5} \rightarrow 2^5 = x \rightarrow x = 2^5 = 32 \rightarrow \boldsymbol{x = 32}$

2) $\boldsymbol{log_y 27 = 3} \rightarrow y^3 = 27 = 3^3 \rightarrow y = \sqrt[3]{3^3} = 3 \rightarrow \boldsymbol{y = 3}$

3) $\boldsymbol{log_{\sqrt{w}} 10 = 2} \rightarrow (\sqrt{w})^2 = 10 \rightarrow \boldsymbol{w = 10}$

4) $\boldsymbol{log_6 \sqrt[3]{v} = \frac{1}{3}} \rightarrow 6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{v} \rightarrow v^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{3}} \rightarrow \boldsymbol{v = 6}$

Ecuaciones Exponenciales

Una ecuación exponencial es aquella ecuación donde la incógnita aparece en el exponente. Ejemplos (resueltos usando la definición):

1) $\boldsymbol{10^{x+1} = 1000} \rightarrow 10^{x+1} = 10^3 \rightarrow x + 1 = 3 \rightarrow \boldsymbol{x = 2}$

2) $\boldsymbol{2^y = 5} \rightarrow log_2 5 = y \rightarrow y = log_2 5 = \frac{log\, 5}{log\, 2} \cong \frac{0{,}70}{0{,}30} = \frac{7}{3} \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{7}{3}}$

Otra manera de resolverlo:

$\boldsymbol{2^y = 5} \rightarrow log\, 2^y = log\, 5 \rightarrow y \cdot log\, 2 = log\, 5 \rightarrow y = \frac{log\, 5}{log\, 2} = \frac{7}{3} \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{7}{3}}$

EJERCICIOS PARA RESOLVER: Calcular los siguientes logaritmos.

1) $log_3(729) =$	2) $log_{\frac{1}{a}}(a^{10}) =$	3) $log_5\left(\frac{1}{125}\right) =$
4) $log\ 0{,}0000001 =$	5) $ln\ e^{-10} =$	6) $log\ 1000000 =$
7) $ln\sqrt[3]{e^{-10}} =$	8) $ln\sqrt[4]{e^5} =$	9) $log_{20}(1)=$
10) $log_e(e^2)=$	11) $log_7(15)=$	12) $log_{15}(7)=$

EJERCICIOS PARA RESOLVER: Determinar x.

1) $2^{1-3x} = 5$	2) $e^{2x} = 8$	3) $5^{2x+2} = 5^{5x-1}$
4) $10^{x-20} = 100$	5) $m^{\left(3x+\frac{1}{3}\right)} = q^{\left(\frac{3x}{7}+1\right)}$	6) $4^{1-x} = 16^{1-2x}$

EJERCICIOS PARA RESOLVER: Determinar x.

1) $log_2(x+1) = 3$	2) $log_x 27 = 3$	3) $\frac{1}{5}log(x+5) = log(2)$
4) $log_2(x+3) + log_2(x-5) = 2 \cdot log_2(x-6)$		5) $log_3(log_3(5x+2)) = 1$

EJERCICIOS PARA RESOLVER. (Con solución)

1) $log_2(9^{x-1}+7) = 2 + log_2(3^{x-1}+1)$ *Sol.* $x_1 = 1 \quad x_2 = 2$

2) $5^{2x+2} = 3^{5x-1}$ *Sol.* $x = 1{,}90$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ log\,x + log\,y = 2 \end{cases}$ *Sol. Los Puntos:* $I_1 = (20; 5)\ y\ I_2 = (5; 20)$

APLICACIONES

1.- Calcular el pH del café negro si la concentración de iones hidronio es de 10^{-5}M.

$$pH = -log[H_3O^+] = -log[10^{-5}] = 5 \rightarrow \boldsymbol{pH = 5,\ pH\ \text{á}cido}$$

2.- A 25 ˚C el pH de una disolución es 4,50. Determinar la concentración de iones hidronio $[H_3O^+]$ y de iones hidroxilo $[OH^-]$ de esta disolución.

$$4{,}50 = -log[H_3O^+] \rightarrow 10^{-4{,}50} = [H_3O^+] \rightarrow \boldsymbol{[H_3O^+] = 3{,}16 \cdot 10^{-5} M}$$

Sabiendo que: Kw (constante de autoionización del agua para 25˚)=10^{-14},

$$Kw = [H_3O^+] \cdot [OH^-] \rightarrow [OH^-] = \frac{Kw}{[H_3O^+]} = 3{,}16 \cdot 10^{-10} \rightarrow \boldsymbol{[OH^-] = 3{,}16 \cdot 10^{-10} M}$$

3.- Despejar t y β de la Ecuación: $y = e^{\frac{-t}{\beta}}$

$$ln\,y = \frac{-t}{\beta} \rightarrow \frac{-t}{\beta} = ln\,y \rightarrow \boldsymbol{t = -\beta\, ln\,y} \rightarrow \boldsymbol{\beta = \frac{-t}{ln\,y}}$$

4.- Se ha observado que todos los procesos radiactivos simples siguen una ley exponencial decreciente. Si N_0 es el número de núcleos radiactivos en el instante inicial, después de un cierto tiempo t, el número de núcleos radiactivos N se ha reducido a $N = N_0 e^{-\lambda t}$. Determinar λ.

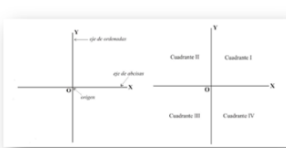
$$N = N_0 e^{-\lambda t} \rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \rightarrow ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t \rightarrow \boldsymbol{\lambda = \frac{-1}{t} \cdot ln\left(\frac{N}{N_0}\right)}$$

Tema 2: TRIGONOMETRÍA. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Trigonometría

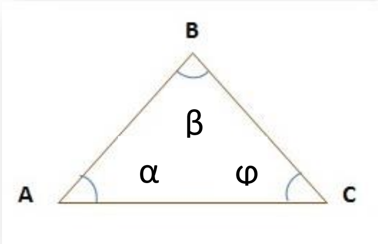
La trigonometría es la parte de la geometría que estudia la relación entre los lados de un triángulo rectángulo y sus ángulos. En términos generales, la trigonometría es el estudio de las funciones seno y coseno; tangente y cotangente; secante y cosecante. Un ángulo es la porción del plano limitada por dos semirectas que poseen un origen en común, se mide en grados, radianes y π radianes.

Definiciones

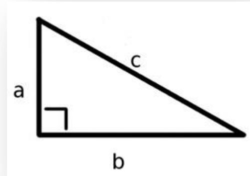


Ejes de Coordenadas - Cuadrantes

Si θ pertenece al II Cuadrante: $\alpha = 180° - \theta$
Si θ pertenece al III Cuadrante: $\alpha = \theta - 180°$
Si θ pertenece al IV Cuadrante: $\alpha = 360° - \theta$

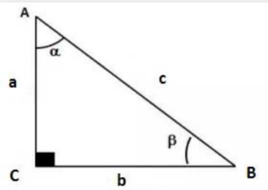


En el triángulo ABC se cumple: $\alpha + \beta + \varphi = 180°$



$c^2 = a^2 + b^2$
Teorema de Pitágoras

Razones Trigonométricas:



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ $a^2 + b^2 = c^2$

a, b: catetos c: hipotenusa

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} = \operatorname{sen}\beta$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{b}{a} = \tan\beta$$

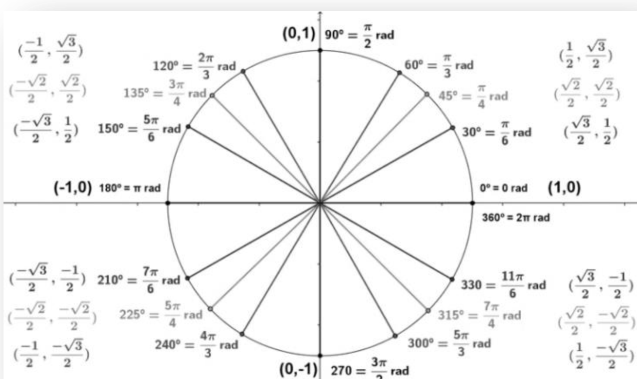
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{a} = \csc\beta$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{b} = \sec\beta$$

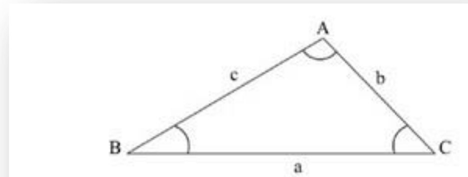
$$\operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{a}{b} = \operatorname{cotan}\beta$$

π rad = 180° = 3,1416… rad
1 rad = 57,29578°
1 rad = 57°17′45″
π/2 rad = 90°
π/6 rad = 30°
π/4 rad = 45°
π/3 rad = 60°
3π/2 rad = 270°
2π rad = 360°

Circulo Trigonométrico



Ley del Seno – Ley del Coseno



$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Ángulos Notables

Razón T.	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\operatorname{sen}\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\sec\alpha$	1	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	∞	1
$\csc\alpha$	∞	2	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}/3$	1	∞	-1	∞
$\operatorname{ctg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	∞	0	∞

Signos de las Razones Trigonométricas

Razón T.	I	II	III	IV
$\operatorname{sen}\alpha$	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$\tan\alpha$	+	-	+	-
$\sec\alpha$	+	-	-	+
$\csc\alpha$	+	+	-	-
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	-	+	-

Identidades Trigonométricas

$$sen^2\,x + cos^2\,x = 1 \qquad sec^2\,x = tan^2\,x + 1 \qquad csc^2\,x = cot^2\,x + 1$$

$$sen\,2x = 2\,sen\,x\,cos\,x \qquad cos\,2x = cos^2\,x - sen^2\,x$$

$$tan\,2x = \frac{2\,tan\,x}{1 - tan^2\,x}$$

$$sen(-x) = -\,sen\,x \qquad cos(-x) = cos\,x \qquad tan(-x) = -\,tan\,x$$

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen\,\alpha\,cos\,\beta \pm sen\,\beta\,cos\,\alpha \qquad cos(\alpha \pm \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta \mp sen\,\alpha\,sen\,\beta$$

$$tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$sen\,\beta = sen(90° - \alpha) = cos\,\alpha \qquad cos\,\beta = cos(90° - \alpha) = sen\,\alpha$$

$$tan\,\beta = tan(90° - \alpha) = cotan\,\alpha$$

EJERCICIOS RESUELTOS

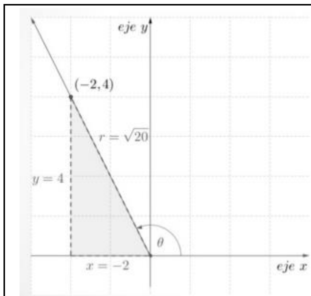
1.- Sabiendo que $\boldsymbol{sen\,\alpha = \frac{1}{2}}$. Calcular las demás razones trigonométricas. El ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ pertenece al primer cuadrante.

$sen\,\alpha = \frac{1}{2} = \frac{co}{h} \qquad ca = \pm\sqrt{h^2 - co^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{ca}{h} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} \qquad \mathbf{tan}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{co}{ca} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}$

$\mathbf{sec}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{h}{ca} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\mathbf{2\sqrt{3}}}{\mathbf{3}} \qquad \mathbf{csc}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{h}{co} = \frac{2}{1} = \mathbf{2} \qquad \mathbf{cotan}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{ca}}{\boldsymbol{co}} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{1}} = \sqrt{\mathbf{3}}$

2.- Calcular el seno, el coseno y la tangente de un ángulo en posición estándar cuyo lado final contiene al punto de coordenadas (-2,4).



Si θ pertenece al II Cuadrante: $\boldsymbol{\alpha} = 180° - \theta$
Si θ pertenece al III Cuadrante: $\boldsymbol{\alpha} = \theta - 180°$
Si θ pertenece al IV Cuadrante: $\boldsymbol{\alpha} = 360° - \theta$

$\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{y}{r} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{4\sqrt{20}}{20} = \frac{\sqrt{\mathbf{20}}}{\mathbf{5}} \approx \mathbf{+0,8944} \qquad \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{20}} = -\frac{2\sqrt{20}}{20} = -\frac{\sqrt{\mathbf{20}}}{\mathbf{10}} \approx \mathbf{-0,4472}$

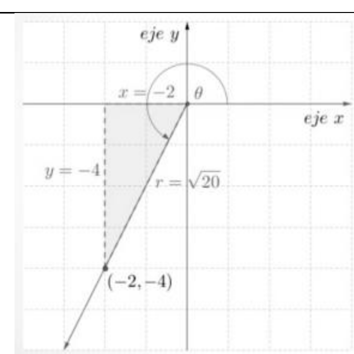
$\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{y}{x} = \frac{4}{-2} = \mathbf{-2}$

3.- Calcular el seno, el coseno y la tangente de un ángulo en posición estándar cuyo lado final contiene al punto de coordenadas (-2,-4).

$\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{y}{r} = \frac{-4}{\sqrt{20}} = -\frac{4\sqrt{20}}{20} = -\frac{\sqrt{\mathbf{20}}}{\mathbf{5}} \approx \mathbf{-0,8944}$

$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{20}} = -\frac{2\sqrt{20}}{20} = -\frac{\sqrt{\mathbf{20}}}{\mathbf{10}} \approx \mathbf{-0,4472}$

$\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{y}{x} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$



4.- Demostrar que: $\mathbf{\tan\alpha+cotan\,\alpha=\sec\alpha\csc\alpha}$

$$\mathbf{\tan\alpha+cotan\,\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}=\mathbf{\sec\alpha\csc\alpha}\qquad \text{LQQD}$$

5.- Demostrar que: $\frac{\boldsymbol{sen\,2\alpha}}{\boldsymbol{1-cos\,2\alpha}}=\boldsymbol{tan\,x}$

$$\frac{\boldsymbol{sen\,2\alpha}}{\boldsymbol{1+cos\,2\alpha}}=\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\boldsymbol{tan\,x}\qquad \text{LQQD}$$

Ecuaciones Trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es una ecuación en la que aparece una o más razones trigonométricas. Para resolver una ecuación trigonométrica es conveniente expresar todos los términos de la ecuación con el mismo arco (ángulo) y después reducirlo a una razón trigonométrica, o bien, factorizar la ecuación si es posible.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Resolver la ecuación: $\boldsymbol{sen\,2x=sen\,x}$

$$sen\,2x=sen\,x\ \rightarrow\ 2\,sen\,x\,cos\,x=sen\,x\ \rightarrow\ sen\,x(2\,cos\,x-1)=0$$
$$sen\,x=0\ \rightarrow\ \boldsymbol{x=0°,180°\ y\ 360°}$$
$$2\,cos\,x-1=0\ \rightarrow\ cos\,x=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \boldsymbol{x=60°\ y\ \ 300°}$$

2) Resolver la ecuación: $\boldsymbol{-3\,sen\,x+cos^2\,x=3}$

$$-3\,sen\,x+cos^2\,x=3\ \rightarrow\ -3\,sen\,x+1-sen^2\,x=3\ \rightarrow\ sen^2\,x+3\,sen\,x+2=0$$
$$t=\operatorname{sen}x\ \rightarrow\ t^2+3t+2=0\ \rightarrow\ t=-1\ y\ t=-2\ \rightarrow\ \operatorname{sen}x=-1\ y\ \ \operatorname{sen}x\neq-2$$
$$\operatorname{sen}x=-1\ \rightarrow\ \boldsymbol{x=270°}$$

3) Determinar $\frac{\mathbf{\cos 150°\,sen\,75°\,\tan 120°}}{\mathbf{\cos 150°+sen\,75°}}$ usando ángulos notables.

$$150°=60°+90°\qquad 75°=30°+45°\qquad 120°=180°-60°$$
$$\boldsymbol{cos}(\mathbf{60°}+\mathbf{90°})=\cos 60°\cos 90°-\operatorname{sen}60°\operatorname{sen}90°=\left(\frac{1}{2}\right)(0)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1)=-\frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$
$$\boldsymbol{sen}(\mathbf{30°}+\mathbf{45°})=\operatorname{sen}30°\cos 45°+\operatorname{sen}45°\cos 30°=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{2}+\sqrt{6}}}{\mathbf{4}}$$
$$\boldsymbol{tan}(\mathbf{180°}-\mathbf{60°})=\frac{tan\,180°-tan\,60°}{1+tan\,180°\,tan\,60°}=\frac{(0)-(\sqrt{3})}{1+(0)(\sqrt{3})}=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\boldsymbol{\sqrt{3}}$$
$$\frac{\mathbf{\cos 150°\,sen\,75°\,\tan 120°}}{\mathbf{\cos 150°+sen\,75°}}=\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)(-\sqrt{3})}{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)}=\frac{\left(\frac{3}{8}\right)(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\left(\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)}=\frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{-4\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}\approx\mathbf{14,5}$$

EJERCICIOS PARA RESOLVER

1.- Calcule los valores de las demás razones trigonométricas.

a) $sen\,\theta={}^{7}/_{25}\quad \theta\,\epsilon\,I\,Cuadrante$	b) $cos\,\alpha={}^{-4}/_{5}\quad \alpha\,\epsilon\,II\,Cuadrante$	c) $tan\,\beta={}^{5}/_{12}\quad \beta\,\epsilon\,IV\,Cuadrante$
d) $ctg\,x={}^{24}/_{7}\quad x\,\epsilon\,III\,Cuadrante$	e) $csc\,x=-2\quad x\,\epsilon\,III\,Cuadrante$	f) $sec\,x={}^{6}/_{5}\quad x\,\epsilon\,IV\,Cuadrante$
g) $sen\,x={}^{\sqrt{3}}/_{2}\quad x\,\epsilon\,II\,Cuadrante$	h) $cos\,x={}^{3}/_{\sqrt{13}}\quad x\,\epsilon\,I\,Cuadrante$	i) $tan\,x={}^{-\sqrt{3}}/_{3}\quad x\,\epsilon\,IV\,Cuadrante$

2.- Demostrar las siguientes igualdades trigonométricas.

a) $sen^2\,x+cos^2\,x=sen\,x\cdot csc\,x$	b) $\frac{1}{csc^2\,x}+cos^2\,x=1$	c) $tan^2\,x+sen\,x\cdot csc\,x=\sec^2 x$
d) $tan^2\,x+tan\,x\cdot cot\,x=\sec^2 x$	e) $\frac{1}{cos\,x\cdot csc\,x}=tan\,x$	f) $sen^2\,x+\frac{sen^2\,x}{\tan^2 x}=1$

3.- Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $2\cos x\cdot\tan x-1=0$	b) $4\cos^2 x=3-4\cos x$	c) $3+3\cos x=\operatorname{sen}^2 x$
d) $\cos x+2\operatorname{sen}^2 x=1$	e) $\cos x+\cos 2x=0$	f) $2\sec x=\tan x+\cot x$

Tema 3: FUNCIÓN, LIMITE Y CONTINUIDAD.

Introducción

Las funciones son una herramienta para describir el mundo real en términos matemáticos. Una función puede representarse mediante una ecuación, una gráfica, una tabla numérica o mediante una descripción verbal. La temperatura a la cual hierve el agua depende de la altitud sobre el nivel del mar (el punto de ebullición es más bajo conforme se asciende). El interés que se paga por una inversión depende del tiempo que ésta se conserve. El área de un círculo depende de su radio. La distancia que recorre un objeto a una rapidez constante a lo largo de una trayectoria recta depende del tiempo transcurrido.

Definición

Dados dos conjuntos A y B, se llama función de A en B $(f: A \to B)$ a una relación que le hace corresponder a cada elemento de A uno y solo un elemento de B, que en forma matemática se expresa: $\boldsymbol{y = f(x)}$.

El conjunto A se denomina **dominio** de la función, y el conjunto B **codominio**. Por lo tanto, para que una relación o correspondencia entre dos conjuntos A y B sea función, debe cumplir con las siguientes condiciones:

- ✓ A cada elemento de A le debe corresponder algún elemento de B.
- ✓ A ningún elemento de A le puede corresponder más de un elemento de B.

Imágenes son los elementos de B que le corresponden a algún elemento de A.

FUNCIONES ALGEBRAÍCAS: $\begin{cases} Polinómicas \\ Racionales \\ Irracionales \end{cases}$

FUNCIONES TRASCENDENTES: $\begin{cases} Logarítmicas \\ Exponenciales \\ Trigonométricas \end{cases}$

Variable Independiente y Variable Dependiente

Si una función se expresa como $y = f(x)$. Llamaremos variable independiente a x, variable dependiente a y o función.

EJEMPLO: Dada la función $y = f(x) = 3x - 2$, determinar la imagen de -1, 0, 4 y π.

Para x=-1, y = f (-1) = 3(-1) - 2 = - 3 - 2 = **- 5**
Para x=0, y = f (0) = 3(0) - 2 = 0 - 2 = **- 2**
Para x=4, y = f (4) = 3(4) - 2 = 12 - 2 = **10**
Para x= π, y = f (π) = 3(π) - 2 = **3π - 2**

Cálculo del Dominio de una función

El dominio está formado por el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente, de tal modo que la función esté definida para todos ellos.

EJERCICIOS RESUELTOS

Determinar el dominio de cada función:

1.- $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 5x + 10}$

Siempre que la función sea polinómica, estará definida para cualquier valor que tome la variable, es decir su dominio está formado por todos los números reales. $\boldsymbol{Dom\ (f)} = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$

2.- $\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{x^2+5x+6}}$

Como la variable está en el denominador, esto puede provocar una división entre cero. Para evitar esta indeterminación debemos hallar las raíces del denominador y descartarlas del dominio. Igualamos el denominador a cero, para calcular sus raíces:

$$\boldsymbol{x^2 + 5x + 6 = 0} \ \to (x+2)(x+3) = 0 \ \to \ x = -2 \quad y \quad x = -3$$

Entonces el dominio tiene la forma: $\boldsymbol{Dom\ (f)} = \mathbb{R} - \{\boldsymbol{-2, -3}\}$

3.- $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{2x - 3}}$

Como la variable está dentro de una raíz par, se puede presentar una indeterminación cuando la cantidad subradical sea menor que cero. Para eliminar estas indeterminaciones obligamos a la cantidad subradical a que sea igual o mayor que cero. Se forma la inecuación:

$2x - 3 \geq 0 \ \to \ x \geq \frac{3}{2}$ Entonces el dominio es: $\boldsymbol{Dom\ (f)} = [\,\boldsymbol{\frac{3}{2}}; +\infty\,)$

Imagen o Recorrido de una función

Si entre los conjuntos A y B se da una función definida de A en B, esto se escribe $f: A \to B$, A es el dominio o conjunto de partida de la función, y B se llama codominio o conjunto de llegada. Para cada elemento de x de A, f le hace corresponder otro en B llamado imagen de x y se denota $f(x)$. El conjunto formado por todos los elementos del codominio que son imágenes de algún elemento del dominio se llama **Imagen** o **Recorrido** de f y se denota por $Im(f)$. Aunque es muy común llamarlo **Rango** de la función, que se denota $Rgo(f)$. Para calcular el rango de una función, se trata de hallar todos los valores de la función y para los cuales existe x , esto se logra despejando x en la función.

EJEMPLO

Hallar el rango de la siguiente función: $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{2x-3}}$

Tenemos que: $y=\sqrt{2x-3}\ \rightarrow\ y^2=2x-3\ \rightarrow\ x=\frac{y^2+3}{2}$

Por tanto: $\boldsymbol{Rgo(f)}=\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$

Cortes con los Ejes Coordenados

Con el eje x: $\boldsymbol{f(x)=0}$ Con el eje y: $\boldsymbol{y=f(o)}$

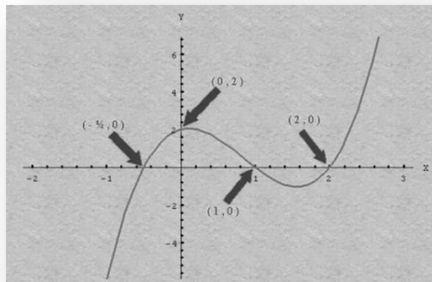
EJEMPLO

Dada la función $y=f(x)=2x^3-5x^2+x+2$. Determinar los cortes con los ejes coordenados.

x=0 $\rightarrow$ $y=f(0)=2(0)^3-5(0)^2+(0)+2=2\rightarrow \boldsymbol{I_1=(0,2)}$

y=0 $\rightarrow 2x^3-5x^2+x+2=0$, usando la regla de Ruffini obtenemos los valores:

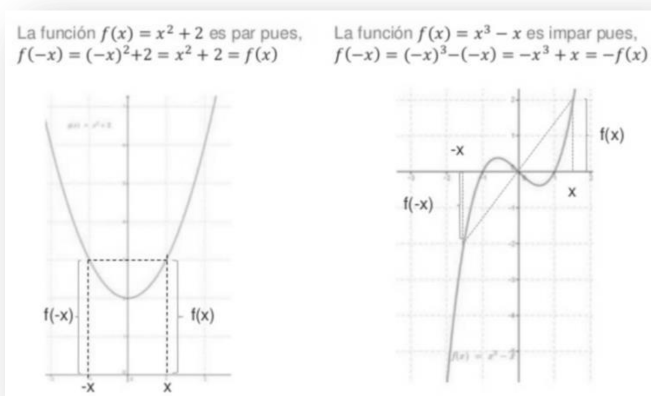
$\rightarrow\ \boldsymbol{I_2=(1,0)},\quad \boldsymbol{I_3=(2,0)}\quad \boldsymbol{y}\quad \boldsymbol{I_4=(-{}^{1}/_{2},0)}$



Funciones Pares y Funciones Impares

Con frecuencia podemos predecir las simetrías de la gráfica de una función al examinar la fórmula para la función.

Si $\boldsymbol{f(-x)=f(x)}$ para toda *x*, entonces la gráfica es simétrica respecto al eje y. tal función se denomina **función par**; si $\boldsymbol{f(-x)=-f(x)}$ para toda *x*, la gráfica es simétrica con respecto al origen, a tal función le llamamos **función impar**.



Periodicidad

Una función $\boldsymbol{f}$ es periódica de periodo $\boldsymbol{T}$ si: $\boldsymbol{f(x+T)=f(x)}$ para todo x perteneciente al dominio de definición. Las funciones periódicas más importantes son las funciones seno, coseno y tangente. T es el periodo mínimo.

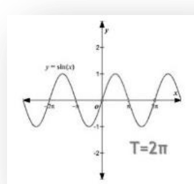
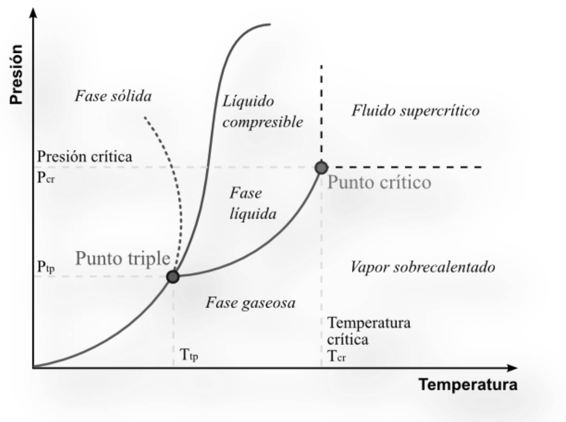


Tabla de Valores

Construir una tabla de valores con los puntos característicos ya calculados más otros convenientemente elegidos y así facilitar su representación gráfica.

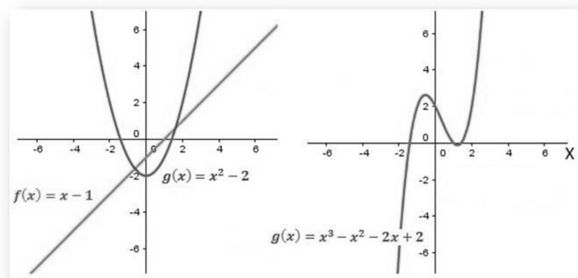
Gráfico de una función

El gráfico de una función $f: A \to B$ está formado por todos los pares ordenados de la forma $\big(x\,;\,f(x)\big)$ o $(x\,;\,y)$, con x perteneciente al dominio de la función y $f(x)$ como la imagen correspondiente a cada uno de ellos.



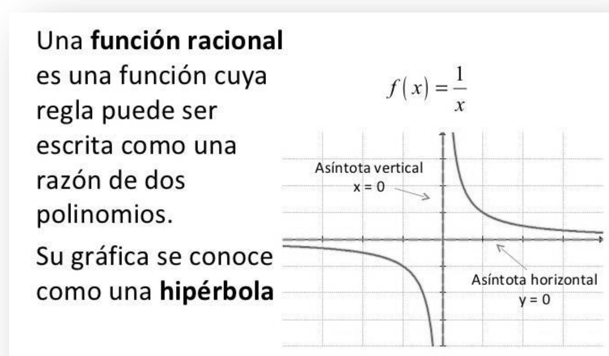
Funciones Algebraicas (POLINÓMICAS)

FUNCIÓN	DOMINIO	RANGO
$x-1$	$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$	$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$
x^2-2	$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$	$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$
x^3-x^2-2x+2	$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$	$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$



Funciones Algebraicas (RACIONALES)

FUNCIÓN	DOMINIO	RANGO
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$



Funciones Algebraicas (IRRACIONALES)

FUNCIÓN	DOMINIO	RANGO
$\sqrt{x+2}$	$[-2,+\infty)$	$[0,+\infty)$
$-3+\sqrt{x+2}$	$[-2,+\infty)$	$[-3,+\infty)$

Es aquella en la cual alguna de las variables tiene exponentes fraccionarios o se encuentran bajo signo radical.

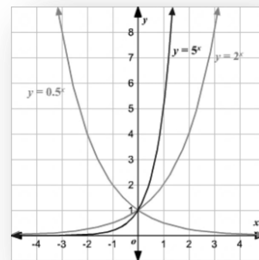
Funciones Trascendentes (EXPONENCIALES)

Se define como toda función de la forma: $\boldsymbol{f(x) = a^x}$**,** donde a es un número positivo y distinto de 1, y x pertenece al conjunto de los números reales; es decir: $a > 0 \ \wedge a \neq 1$.

Propiedades:

1. La función está definida de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}+$.
2. Si $a > 1$ la función es creciente.
3. Si $a < 1$ la función es decreciente.
4. Para valores distintos de x se obtendrán imágenes diferentes; es decir, la función es biyectiva.
5. La función siempre corta al eje *Y* en 1, ya que: $a^0 = 1$.

FUNCIÓN	DOMINIO	RANGO
2^x	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$
5^x	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$



Funciones Trascendentes (LOGARÍTMICAS)

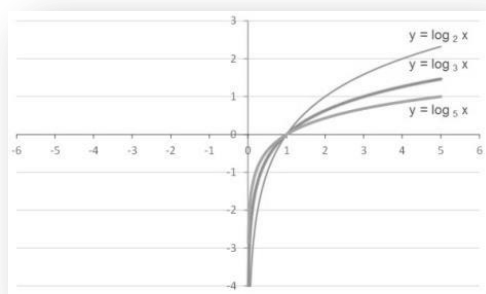
Como dije anteriormente, la función exponencial: $\boldsymbol{f(x) = a^x} : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$ es biyectiva; por lo tanto, admite función inversa. Esta función inversa se conoce con el nombre de función logarítmica de base *a* y se denota por:

$$\boldsymbol{f(x) = log_a\, x} : \ \mathbb{R}+ \to \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{log_a\, x}\,, se\ lee\ logaritmo\ en\ base\ \boldsymbol{a}\ de\ \boldsymbol{x}$$

Propiedades:

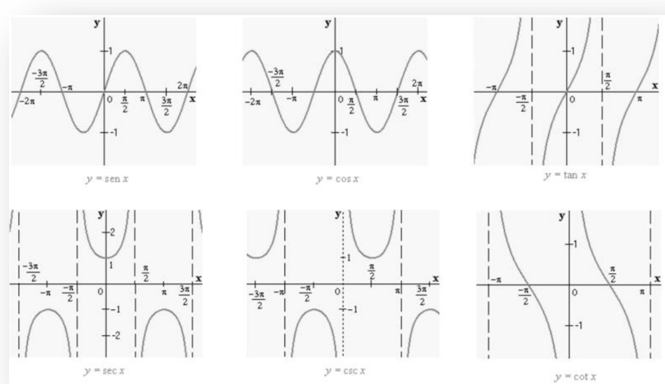
1. Su dominio es $\mathbb{R}+$, es decir la variable x solo admite valores positivos.
2. Es la inversa de la función exponencial.

FUNCIÓN	DOMINIO	RANGO
$\log_a x$	$\forall\, x\, \epsilon\, (0, +\infty)$	$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$



Funciones Trascendentes (TRIGONOMÉTRICAS)

FUNCIÓN	DOMINIO	RANGO
$\boldsymbol{sen\, x}$	$\forall\, x\, \epsilon\, \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$	$[-1, +1]$
$\boldsymbol{cos\, x}$	$\forall\, x\, \epsilon\, \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$	$[-1, +1]$
$\boldsymbol{tan\, x}$	$\forall\, x\ -\ [2k+1]\frac{\pi}{2}$	$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
$\boldsymbol{cot\, x}$	$\forall\, x\ -\ [k\pi]$	$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
$\boldsymbol{sec\, x}$	$\forall\, x\ -\ [2k+1]\frac{\pi}{2}$	$\mathbb{R} - [-1, +1]$
$\boldsymbol{csc\, x}$	$\forall\, x\ -\ [k\pi]$	$\mathbb{R} - [-1, +1]$



El Límite

Los temas estudiados anteriormente son parte de lo que se denomina precálculo. Proporcionan los fundamentos para el cálculo, pero no son cálculo. Ya estamos listos para la noción de límite, el cálculo es el estudio de los límites. El concepto de límite es la base fundamental con la que se construye el cálculo infinitesimal (diferencial e integral). Informalmente hablando se dice que el límite es el valor al que tiende una función cuando la variable independiente tiende a un número determinado o al infinito. El límite de la función $\boldsymbol{f(x)}$ en el punto $\boldsymbol{x_0}$ es el valor al que se acercan las imágenes (las y) cuando las variables independientes (las x) se acercan al valor $\boldsymbol{x_0}$. Es decir el valor al que tienden las imágenes cuando las variables independientes tienden a $\boldsymbol{x_0}$.

Estudiemos el límite de la función $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2}$ en el punto $\boldsymbol{x_0}$ **= 1**.

x	$y = f(x) = x^2 - 2$
0,9	-1,190000
0,99	-1,019900
0,999	-1,001999
0,9999	-1,000200
0,99999	-1,000020
1	**-1**
1,00001	-0,999998
1,0001	-0,999800
1,001	-0,997999
1,01	-0,979900
1,1	-0,790000

Se deduce intuitivamente que el límite de la función $\boldsymbol{f(x)}$ cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a 1, es -1.

Definición de Límite

Se dice que la función $\boldsymbol{f(x)}$ tiene como límite el número $\boldsymbol{L}$, cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{x_0}$, si fijado un número real positivo $\boldsymbol{\varepsilon}$, mayor que cero, existe un número positivo $\boldsymbol{\delta}$ dependiente de $\boldsymbol{\varepsilon}$, tal que, para todos los valores de $\boldsymbol{x}$ distintos de $\boldsymbol{x_0}$ que cumplen la condición $|\boldsymbol{x - x_0}| < \boldsymbol{\delta}$, se cumple que: $|\boldsymbol{f(x) - L}| < \boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0 \ \ tal\ que\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Límite en un Punto

Si $\boldsymbol{f(x)}$ es una función usual (polinómica, racional, radical, exponencial, logarítmica o trigonométrica) y está definida en el punto $\boldsymbol{x_0}$, entonces se suele cumplir:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = L$$

Es decir, para calcular el límite se sustituye en la función el valor al que tienden las x.

EJEMPLOS

1. $\boldsymbol{lim_{x\to -1}(-x^2 - 5x + 6)} = -(-1)^2 - 5(-1) + 6 = -1 + 5 + 5 = \boldsymbol{10}$
2. $\boldsymbol{lim_{x\to 2}(x^3 + 10x - 30)} = (2)^3 + 10(2) - 30 = 8 + 20 - 30 = \boldsymbol{-2}$
3. $\boldsymbol{lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+1}{x^2-3x+10}\right)} = \frac{(0)^3+1}{(0)^2-3(0)+10} = \frac{1}{10} = \boldsymbol{0,1}$
4. $\boldsymbol{lim_{x\to 2}(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x}\,)} = \sqrt{(2)^2 + 3(2)} - \sqrt{(2)^2 + (2)} = \sqrt{\boldsymbol{10}} - \sqrt{\boldsymbol{6}}$
5. $\boldsymbol{lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{2x-1}}{x^2-3x+10}\right)} = \frac{\sqrt[3]{2(0)-1}}{(0)^2-3(0)+10} = \frac{-1}{10} = \boldsymbol{-0,1}$

Cálculo del límite en una función definida por intervalos (Límites Laterales)

En primer lugar tenemos que estudiar los límites laterales en los puntos de unión de los diferentes tramos:

- ✓ Si coinciden, este es el valor del límite
- ✓ Si no coinciden, el límite no existe

EJEMPLOS

Estudiemos la función por intervalos: $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1 & x < -1 \\ x^2 & -1 \le x \le 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}}$

En $\boldsymbol{x_0 = -1}$, *los límites laterales son:*
Por la izquierda: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 1 = 1$; *Por la derecha*: $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x^2 = (-1)^2 = 1$
Como en ambos casos coinciden, el límite existe en $x = -1$ *y vale 1*

En $\boldsymbol{x_0 = 1}$, *los límites laterales son:*
Por la izquierda: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = (1)^2 = 1$; *Por la derecha*: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2 = 2$
Como no coinciden los límites laterales, el límite no existe en $x = 1$

Estudiemos la función por intervalos: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}\ , & x \le -2 \\ 1 - x, & x > -2 \end{cases}$

En $x_0 = -2$*, los límites laterales son:*
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \sqrt{-x} = \sqrt{-(-2)} = \sqrt{2}$
Por la derecha: $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} 1 - x = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$
Como no coinciden los límites laterales, el límite no existe en $x = -2$

PROPIEDADES

1. Límite de una constante: $\boldsymbol{lim_{x\to x_0} k = k} \qquad k: constante$
2. Límite de una suma algebraica: $\boldsymbol{lim_{x\to x_0}[f(x) + g(x)] = lim_{x\to x_0} f(x) + \ lim_{x\to x_0} g(x)}$
3. Límite de un producto: $\boldsymbol{lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \ lim_{x\to x_0} g(x)}$
4. Límite de un cociente: $\boldsymbol{lim_{x\to x_0}[f(x)/g(x)] = lim_{x\to x_0} f(x)/ \ lim_{x\to x_0} g(x)}$
5. Límite de una potencia: $\boldsymbol{lim_{x\to x_0}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \ lim_{x\to x_0} f(x)^{\lim_{x\to x_0} g(x)}}$
6. Límite de una función compuesta: $\boldsymbol{lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(lim_{x\to x_0} g(x))}$
7. Límite de un radical: $\boldsymbol{lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ lim_{x\to x_0} f(x)}} \quad si\ n\ es\ par\ f(x) \ge 0$
8. Límite de un logaritmo: $\boldsymbol{lim_{x\to x_0} \log_a f(x) = \log_a\left(\ lim_{x\to x_0} f(x)\right)} \quad si\ a > 0\ \ y\ \ f(x) > 0$

Métodos para Cálculo de Límites

1.- **Por sustitución directa de la variable**: acá algunos ejercicios resueltos, aplicando las propiedades.

a) $\boldsymbol{lim_{x\to 1}} \sqrt[3]{\boldsymbol{\frac{2x+3}{x+1}}} = \sqrt[3]{lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x+1}} = \sqrt[3]{\frac{lim_{x\to 1} 2x+3}{lim_{x\to 1} x+1}} = \sqrt[3]{\frac{2(1)+3}{(1)+1}} = \sqrt[3]{\boldsymbol{\frac{5}{2}}}$

b) $\boldsymbol{lim_{x\to 0}} \sqrt[5]{\boldsymbol{\frac{8x-3}{x-3}}} = \sqrt[5]{lim_{x\to 0}\frac{8x-3}{x-3}} = \sqrt[5]{\frac{lim_{x\to 0} 8x-3}{lim_{x\to 0} x-3}} = \sqrt[5]{\frac{8(0)-3}{(0)-3}} = \sqrt[5]{\boldsymbol{\frac{-3}{-3}}} = \sqrt[5]{1} = \boldsymbol{1}$

c) $\boldsymbol{lim_{x\to 10} log\left(\frac{x^2+1}{x^3+2}\right)} = log\left(lim_{x\to 10}\left(\frac{x^2+1}{x^3+2}\right)\right) = log\left(\frac{\lim_{x\to 10} x^2+1}{\lim_{x\to 10} x^3+2}\right) = \log\left(\frac{101}{1002}\right) \cong \boldsymbol{-1}$

d) $\boldsymbol{lim_{x\to 0} sen\left(\frac{x+\pi^2}{x+2\pi}\right)} = sen\left(lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\pi^2}{x+2\pi}\right)\right) = sen\left(\frac{lim_{x\to 0} x+\pi^2}{lim_{x\to 0} x+2\pi}\right) = sen\left(\frac{0+\pi^2}{0+2\pi}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{1}$

e) $\boldsymbol{lim_{x\to 2} e^{1-x^2}} = e^{lim_{x\to 2} 1-x^2} = e^{1-2^2} = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \cong \boldsymbol{0,05}$

f) $\boldsymbol{lim_{x\to -2} 10^{\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)}} = 10^{lim_{x\to -2}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)} = 10^{\left(\frac{(-2)+2}{2(-2)-1}\right)} = 10^{\left(\frac{0}{-5}\right)} = 10^0 = \boldsymbol{1}$

2. - **Formas Indeterminadas del Tipo:** $\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{\infty}$

a) $\boldsymbol{lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}\right]} = \frac{(3)^2-9}{(3)^2-5(3)+6} = \frac{0}{0}$ *factorizamos ambos polinomios*

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}\right] = \lim_{x\to 3}\left[\frac{(x+3)}{(x-2)}\right] = \frac{3+3}{3-2} = \frac{6}{1} = \boldsymbol{6}$$

b) $\boldsymbol{lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{4+x}-2}\right]} = \left[\frac{\sqrt{1+0}-1}{\sqrt{4+0}-2}\right] = \frac{1-1}{2-2} = \frac{0}{0}$ *racionalizamos*

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{4+x}-2}\right)\left(\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\right)\left(\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1+x-1}{4+x-4}\right)\left(\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{1+x}+1}\right)\right] = \frac{4}{2} = \boldsymbol{2}$$

c) $\boldsymbol{lim_{x\to 0}\left[\frac{\mathbf{sen}\,6x}{2x}\right]} = \frac{\text{sen}\,0}{2(0)} = \frac{0}{0}$ $\quad cuando\ x \to 0,\ sen\,ax = tan\,ax \cong ax$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{6x}{2x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{6}{2}\right] = \lim_{x\to 0}[3] = \boldsymbol{3}$$

d) $\boldsymbol{lim_{x\to\infty}\left[\frac{5x^2+2x+1}{x^2-5x+6}\right]} = \frac{5\infty^2+2\infty+1}{\infty^2-5\infty+6} = \frac{\infty}{\infty}$ *se divide todo entre la menor potencia entre los polinomios*

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{5x^2+2x+1}{x^2}}{\frac{x^2-5x+6}{x^2}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}\right] = \frac{5}{1} = \boldsymbol{5}$$

e) $\boldsymbol{lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{\infty^2+\infty}-\sqrt{\infty^2+4}=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2-4}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+4}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

f) $\boldsymbol{lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^x}=1^\infty$ *aplicamos la fórmula:* $\boldsymbol{lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x}=e^k \quad lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^x=\boldsymbol{e^6}$

g) $\boldsymbol{lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=1^\infty$ *entonces:* $lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-1)}{x}\right)^x=\boldsymbol{e^{-1}}$

Los límites de la forma indeterminada: $0\cdot\infty,\ 1^\infty y\ 0^\infty$ serán analizadas más adelante cuando se utilice la regla de L'Hopital para resolver algunos tipos de límites.

Continuidad de una Función

Se dice que una función es **continua** en un punto $\boldsymbol{x_0}$ si se cumplen las condiciones siguientes:

1. La función $f(x)$ esta definida en x_0 , con x_0 que pertenece al dominio de f.
2. Existe un número real L tal que: $lim_{x\to x_0} f(x)=L \quad con\ L\ finito.$
3. $lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=L$

Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función: $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<2\\ 4, & x\geq 2\end{cases}$ en $x=2$

Aplicando las condiciones:

1. $f(2)=4,\ la\ función\ esta\ definida\ para\ \ x=2$
2. *Evaluamos los límites laterales:*
   En $x_0=2$*, los límites laterales son:*
   $Por\ la\ izquierda: \lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-} x^2=2^2=4$
   $Por\ la\ derecha: \lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+} 4=4$
   Ambos límites coinciden, por tanto el límite existe y vale 4
3. $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)=4$

Por tanto se cumplen las tres condiciones de continuidad, la función $\boldsymbol{f(x)}$ ***es continua en*** $\boldsymbol{x=2}$

Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función: $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<-1\\ \sqrt{3x^2+1}, & -1\leq x\leq 1\\ 1-x, & x>1\end{cases}$

Aplicando las condiciones para $\boldsymbol{x=-1}$*:*

1. $f(-1)=\sqrt{3(-1)^2+1}=2,\ la\ función\ esta\ definida\ para\ \ x=-1$
2. *Evaluamos los límites laterales:*
   En $x_0=-1$*, los límites laterales son:*
   $Por\ la\ izquierda: \lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-} x^2+1=2$
   $Por\ la\ derecha: \lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\sqrt{3x^2+1}=2$
   Ambos límites coinciden, por tanto el límite existe y vale 2
3. $\lim_{x\to2} f(x)=f(-1)=2$

Por tanto se cumplen las tres condiciones de continuidad, la función $\boldsymbol{f(x)}$ ***es continua en*** $\boldsymbol{x=-1}$

Aplicando las condiciones para $\boldsymbol{x=1}$*:*

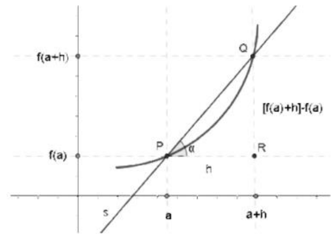
1. $f(1)=\sqrt{3(1)^2+1}=2,\ la\ función\ esta\ definida\ para\ \ x=1$
2. *Evaluamos los límites laterales:*
   En $x_0=1$*, los límites laterales son:*
   $Por\ la\ izquierda: \lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\sqrt{3x^2+1}=2$
   $Por\ la\ derecha: \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+} 1-x=0$
   Ambos límites no coinciden, por tanto el límite no existe

No se cumple la segunda condición de continuidad, la función $\boldsymbol{f(x)}$ ***no es continua en*** $\boldsymbol{x=1}$

Tema 4: LAS DERIVADAS. APLICACIONES.

Definiciones

Tasa de Variación.- Consideremos una función $y = f(x)$ y consideremos dos puntos próximos sobre el eje de abscisas "a" y "$a+h$", siendo "h" un número real que corresponde al incremento de x. Se llama tasa de variación de la función en el intervalo $[a, a+h]$, que se representa por Δy, a la diferencia entre las ordenadas correspondientes a los puntos de abscisas a y $a+h$, $\Delta y = f(a+h) - f(a)$.



<u>Interpretación Geométrica</u>: la expresión anterior coincide con la pendiente de la recta secante a la función $f(x)$, que pasa por los puntos de abscisas a y $a+h$.

$m = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ Ya que el triángulo PQR resulta que: $tan \propto = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Derivada de una función en un punto

La derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ es el valor del límite, si existe, de un cociente incremental, cuando el incremento de la variable tiende a cero.

$$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar la derivada por definición de la función: $f(x) = 2x^2$ $en\ el\ punto\ x = 3$.

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2-2x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x^2+2hx+h^2)-2x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4hx+2h^2}{h} = 4x$

$\boldsymbol{f'(3)} = 4(3) = \mathbf{12}$

2.- Hallar la derivada por definición de la función: $f(x) = x^2 + 4x - 5$ $en\ el\ punto\ x = 1$.

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+4(x+h)-5-(x^2+4x-5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2+4x+4h-5-x^2-4x+5}{h} =$

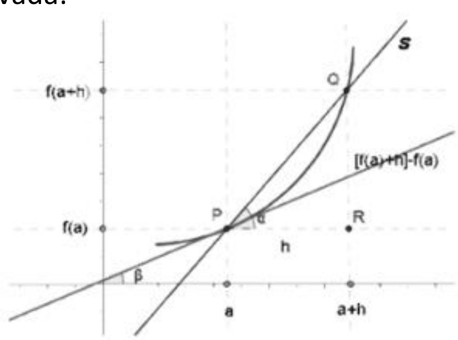
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2+4h}{h} = 2x+4 \rightarrow \boldsymbol{f'(1)} = 2(1)+4 = \mathbf{6}$

3.- Hallar la derivada por definición de la función: $f(x) = \frac{2}{x+3}$ $en\ el\ punto\ x = 0$.

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{x+h+3}-\frac{2}{x+3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(x+3)-2(x+h+3)}{(x+h+3)(x+3)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x+6-2x-2h-6}{h(x+h+3)(x+3)} = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{(x+h+3)(x+3)}$

$f'(x) = \frac{-2}{(x+3)^2} \rightarrow \boldsymbol{f'(0)} = \frac{-2}{(3)^2} = -\mathbf{\frac{2}{9}}$

Interpretación Geométrica de la Derivada:



Cuando h tiende a 0, el punto Q tiende a confundirse con el punto P. entonces la recta secante tiende a ser la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto P, y por tanto el ángulo $\propto$ tiende a ser β.

$$\tan\beta = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h} = f'(a)$$

La pendiente de la tangente a la curva en un punto es igual a la derivada de la función en ese punto: $m_t = f'(a)$.

REGLAS Y TEOREMAS PARA DERIVAR

Dada las funciones $\mathrm{U}=\mathrm{f}(\mathrm{x})$ y $\mathrm{V}=\mathrm{g}(\mathrm{x})$ continuas, k constante; podemos realizar las siguientes operaciones.

1.- $[\mathbf{U} \pm \mathbf{V}]' = \mathbf{U}' \pm \mathbf{V}'$	**2.-** $[\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}]' = \mathbf{U}' \cdot \mathbf{V} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}'$
3.- $\left[\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{V}}\right]' = \frac{\mathbf{U}' \cdot \mathbf{V} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}'}{\mathbf{V}^2} \quad \mathbf{V} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$	**4.-** $\mathbf{y} = \mathbf{U} = \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{0}$
5.- $\mathbf{y} = \mathbf{U} = \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{1}$	**6.-** $\mathbf{y} = \mathbf{U}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{n}\mathbf{U}^{\mathbf{n}-\mathbf{1}}\mathbf{U}'$
7.- $\mathbf{y} = \mathbf{a}^{\mathbf{U}} \rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{a}^{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{Lna} \cdot \mathbf{U}'$	**8.-** $\mathbf{y} = \mathbf{e}^{\mathbf{U}} \rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{U}' \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{U}}$
9.- $\mathbf{y} = \log_{\mathbf{a}} \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{y}' = \frac{\mathbf{U}' \cdot \log_{\mathbf{a}} \mathbf{e}}{\mathbf{U}} \quad \mathbf{U} > \mathbf{0}$	**10.-** $\mathbf{y} = \ln \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{y}' = \frac{\mathbf{U}'}{\mathbf{U}} \quad \mathbf{U} > \mathbf{0}$
11.- $\mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{U}} \rightarrow \mathbf{y}' = \frac{\mathbf{U}'}{2\sqrt{\mathbf{U}}} \quad \mathbf{U} \geq \mathbf{0}$	**12.-** $\mathbf{y} = \mathbf{sen}\, \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{U}' \cdot \cos \mathbf{U}$
13.- $\mathbf{y} = \cos \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{y}' = -\mathbf{U}' \cdot \mathbf{sen}\, \mathbf{U}$	**14.-** $\mathbf{y} = \tan \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{U}' \cdot (\sec \mathbf{U})^2$
15.- $\mathbf{y} = \sec \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{U}' \cdot \sec \mathbf{U} \cdot \tan \mathbf{U}$	**16.-** $\mathbf{y} = \csc \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{y}' = -\mathbf{U}' \cdot \csc \mathbf{U} \cdot \mathbf{cotag}\, \mathbf{U}$
17.- $\mathbf{y} = \mathbf{cotag}\, \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{y}' = -\mathbf{U}' \cdot (\csc \mathbf{U})^2$	**18.-** $\mathbf{y} = \mathbf{sen}^{-1} \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{y}' = \frac{\mathbf{U}'}{\sqrt{1-\mathbf{U}^2}}$
19.- $\mathbf{y} = \cos^{-1} \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{y}' = -\frac{\mathbf{U}'}{\sqrt{1-\mathbf{U}^2}}$	**20.-** $\mathbf{y} = \tan^{-1} \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{y}' = \frac{\mathbf{U}'}{1+\mathbf{U}^2}$
21.- $\mathbf{y} = \mathbf{U}^{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{U}^{\mathbf{V}} \left[\mathbf{V}' \cdot \mathbf{LnU} + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{U}'}{\mathbf{U}}\right]$	

EJERCICIOS: Derivar las siguientes funciones

1.- $\boldsymbol{y = f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 10}$

Sol: $\boldsymbol{y'} = 3x^{3-1} + 2\cdot 2x^{2-1} - 6\cdot 1x^{1-1} + 10' = \boldsymbol{3x^2 + 4x - 6}$

2.- $\boldsymbol{y = f(x) = (x^2 - 9)^5}$

Sol: $\boldsymbol{y'} = 5(x^2-9)^{5-1}(x^2-9)' = 5(x^2-9)^4\cdot(2x-0) = \boldsymbol{10x(x^2-9)^4}$

3.- $\boldsymbol{y = f(x) = \sqrt{a^3 - x^3}}$

$$Sol: \quad \boldsymbol{y'} = \frac{(a^3-x^3)'}{2\sqrt{a^3-x^3}} = \frac{0-3x^2}{2\sqrt{a^3-x^3}} = \boldsymbol{\frac{-3x^2}{2\sqrt{a^3-x^3}}}$$

4.- $\boldsymbol{y = f(x) = x\cdot e^x}$

Sol: $\boldsymbol{y'} = (x)'(e^x) + (x)(e^x)' = e^x + xe^x = \boldsymbol{e^x(1+x)}$

5.- $\boldsymbol{y = f(x) = x^2 \cdot \ln x}$

$$Sol: \quad \boldsymbol{y'} = (x^2)'(\ln x) + (x^2)(\ln x)' = 2x\ln x + x^2\left(\frac{x'}{x}\right) = 2x\ln x + x = \boldsymbol{x(2\ln x + 1)}$$

6.- $\boldsymbol{y = f(x) = \frac{e^x}{\ln x}}$

$$Sol: \quad \boldsymbol{y'} = \frac{(e^x)'(\ln x) - (e^x)(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{e^x\ln x - e^x\left(\frac{x'}{x}\right)}{(\ln x)^2} = \frac{e^x\left(\ln x - \frac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2} = \boldsymbol{\frac{e^x(x\ln x - 1)}{x(\ln x)^2}}$$

7.- $\boldsymbol{y = f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+10}}$

$$Sol: \quad \boldsymbol{y'} = \frac{(x^2-2)'(x^2+10) - (x^2-2)(x^2+10)'}{(x^2+10)^2} = \frac{2x(x^2+10) - 2x(x^2-2)}{(x^2+10)^2} = \boldsymbol{\frac{24x}{(x^2+10)^2}}$$

8.- $\boldsymbol{y = f(x) = sen(2x)\cdot \ln(x^3 - 2x + 10)}$

Sol: $\boldsymbol{y'} = sen(2x)'\cdot \ln(x^3-2x+10) + sen(2x)\cdot \ln(x^3-2x+10)' =$

$$\boldsymbol{y'} = 2\cos(2x)\cdot \ln(x^3-2x+10) + sen(2x)\cdot\frac{(x^3-2x+10)'}{x^3-2x+10} =$$

$$\boldsymbol{y' = 2\cos(2x)\cdot \ln(x^3-2x+10) + sen(2x)\cdot\frac{3x^2-2}{x^3-2x+10}}$$

9.- $\boldsymbol{y = f(x) = \frac{e^{3x+1}}{10x+9}}$

$$Sol: \quad \boldsymbol{y'} = \frac{(e^{3x+1})'(10x+9) - (e^{3x+1})(10x+9)'}{(10x+9)^2} = \frac{3e^{3x+1}(10x+9) - (e^{3x+1})10}{(10x+9)^2} =$$

$$\boldsymbol{y'} = \frac{e^{3x+1}(30x+27-10)}{(10x+9)^2} = \boldsymbol{\frac{e^{3x+1}(30x+17)}{(10x+9)^2}}$$

10.- $\boldsymbol{y = f(x) = \frac{1}{2\tan x}}$

$$Sol: \quad \boldsymbol{y'} = \frac{0-(2\tan x)'}{4\tan^2 x} = \frac{-2\sec^2 x}{4\tan^2 x} = -\frac{1}{2\,sen^2 x} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}\csc^2 x}$$

APLICACIONES

La Regla de L'Hopital

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, en donde **f** y **g** son derivables en un entorno de **a** y existen; $\lim_{x\to a}\frac{f(x)'}{g(x)'}$, este limite coincide con $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

La regla de L'Hopital se aplica directamente en las indeterminaciones: $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$.

EJERCICIOS (Resolver los siguientes limites usando la regla de L'Hopital)

1.- $\boldsymbol{lim_{x\to 0}} \frac{\boldsymbol{e^x - e^{-x}}}{\boldsymbol{sen\,x}} = \frac{0}{0}$ $\quad aplico\ la\ regla\ de\ L'Hopital$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{cos\,x} = \frac{e^0 + e^{-0}}{cos\,0} = \frac{1+1}{1} = \mathbf{2}$$

2.- $\boldsymbol{lim_{x\to \infty^+}} \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{3ln\,x + 2x}} = \frac{+\infty}{+\infty}$ $\quad aplico\ la\ regla\ de\ L'Hopital$

$$\lim_{x\to \infty^+} \frac{x}{3ln\,x + 2x} = \lim_{x\to \infty^+} \frac{1}{\frac{3}{x} + 2} = \frac{1}{\frac{3}{+\infty} + 2} = \frac{1}{0+2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

3.- $\boldsymbol{lim_{x\to \frac{\pi}{4}}} \frac{\boldsymbol{tan\,x - 1}}{\boldsymbol{cos\,2x}} = \mathbf{\frac{0}{0}}$ $\quad aplico\ la\ regla\ de\ L'Hopital$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{tan\,x - 1}{cos\,2x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{sec^2\,x}{-2\,sen\,2x} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2}{-2(1)} = \mathbf{-1}$$

4.- $\boldsymbol{lim_{x\to 0}} \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{sen\,x}}\right) = \infty - \infty$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{sen\,x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{sen\,x - x}{x\,sen\,x}\right) = \frac{0}{0} \quad aplico\ la\ regla\ de\ L'Hopital$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{cos\,x - 1}{sen\,x + x\,cos\,x}\right) = \frac{0}{0} \quad aplico\ nuevamente\ la\ regla\ de\ L'Hopital$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{-\,sen\,x}{cos\,x + cos\,x - x\,sen\,x}\right) = \frac{0}{2} = \mathbf{0}$$

APLICACIONES

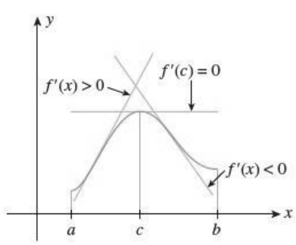
Crecimiento y Decrecimiento de una función. Concavidades. Máximos y Mínimos de una función. Puntos de Inflexión.

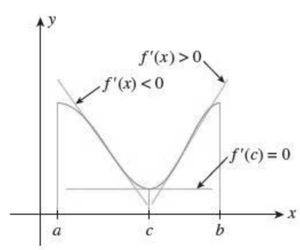
Criterio de la Primera Derivada:

$f'(x) = 0 \ \rightarrow$ puntos críticos (posibles máximos o mínimos)

$f'(x) > 0 \ \rightarrow$ f **crece** $\quad f'(x) < 0 \ \rightarrow$ f **decrece**

si **c** es un punto crítico, entonces: $\quad$ si $f''(\mathbf{c}) > 0$ **c** es un **mínimo**, si $f''(\mathbf{c}) < 0$ **c** es un **máximo**



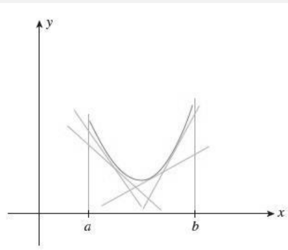


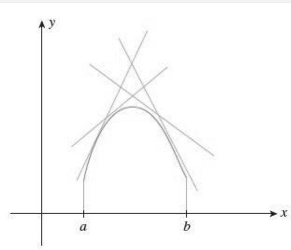
Criterio de la Segunda Derivada:

$f''(x) = 0 \ \rightarrow$ puntos críticos (posibles puntos de inflexión)

$f''(x) > 0 \ \rightarrow$ f **es cóncava hacia arriba** $\quad f''(x) < 0 \ \rightarrow$ f **es cóncava hacia abajo**

si **c** es un punto crítico, entonces: si $f'''(\mathbf{c}) \neq 0$ **c** es un **punto de inflexión**





Ejercicio: Determinar si es posible los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$$

Solución:

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x^2 - 2x - 8) = 3(x+2)(x-4) \rightarrow \boldsymbol{x = -2}$ ***y*** $\boldsymbol{x = 4}$ *son puntos críticos*

$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1) \rightarrow \boldsymbol{x = 1}$ *es un punto crítico*

$f'''(x) = 6$

Criterio de la Primera Derivada: estudiamos la función entre los intervalos: $(-\infty; -2)$, $(-2; 4)$ y $(4; +\infty)$

$f'(-3) > 0$ *entonces* $\boldsymbol{f}$ ***crece en*** $(-\infty; \boldsymbol{-2})$ y $f'(5) > 0$ *entonces* $\boldsymbol{f}$ ***crece en*** $(\boldsymbol{4}; +\infty)$

$f'(0) < 0$ *entonces* $\boldsymbol{f}$ ***decrece en*** $(\boldsymbol{-2}; +\infty)$

en $x = -2 \rightarrow f''(-2) < 0$ *entonces* $\boldsymbol{x = -2}$ ***es un máximo*** $\rightarrow$ $\boldsymbol{max} = (\boldsymbol{-2}; \boldsymbol{60})$

en $x = 4 \rightarrow f''(4) > 0$ *entonces* $\boldsymbol{x = 4}$ ***es un mínimo*** $\rightarrow$ $\boldsymbol{min} = (\boldsymbol{4}; \boldsymbol{-48})$

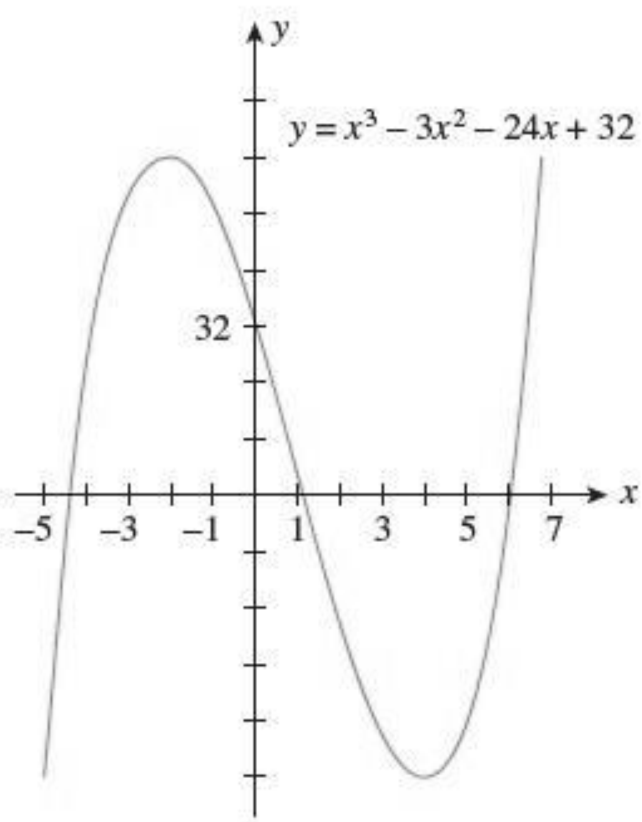
Criterio de la Segunda Derivada: estudiamos la función entre los intervalos: $(-\infty; 1)$ y $(1; +\infty)$

$f''(0) < 0$ *entonces* $\boldsymbol{f}$ ***es cóncava hacia abajo en*** $(-\infty; \boldsymbol{1})$

$f''(2) > 0$ *entonces* $\boldsymbol{f}$ ***es cóncava hacia arriba en*** $(\boldsymbol{1}; +\infty)$

en $x = 1 \rightarrow f'''(1) \neq 0$ *entonces* $\boldsymbol{x = 1}$ ***es un punto de inflexión*** $\rightarrow$ $\boldsymbol{PI} = (\boldsymbol{1}; \boldsymbol{6})$

Gráfico:



Ejercicio: Determinar si es posible; los puntos máximos, los puntos mínimos y puntos de inflexión de la función: $\boldsymbol{f(x)=\frac{x}{x^2+1}}$.

Dominio de f: $(-\infty,\infty)$; $f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$; $f''(x)=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ $\quad 1-x^2=0 \quad x_1=1$ y $x_2=-1$

$f'(1)=0$ y $f'(-1)=0$ *por tanto* x_1 *y* x_2 *son puntos criticos*

$x_1=1 \quad f''(1)=\frac{2(1^2-3)}{(1^2+1)^3}=-\frac{1}{2}<0$ *entonces* $x_1=1$ *es un máximo relativo*

$x_2=-1 \quad f''(-1)=\dfrac{-2(1^2-3)}{(1^2+1)^3}=\dfrac{1}{2}>0$ *entonces* $x_2=-1$ *es un mínimo relativo*

$f''(x)=\dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \qquad 2x(x^2-3)=0 \quad x_1=0, x_2=\sqrt{3}$ y $x_3=-\sqrt{3}$

$f''(0)=0$, $f''(\sqrt{3})=0$ y $f''(-\sqrt{3})=0$ *por tanto* x_1, x_2 *y* x_3 *son puntos criticos*

Determinamos: $f'''(x)=\frac{-6(x^4-6x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

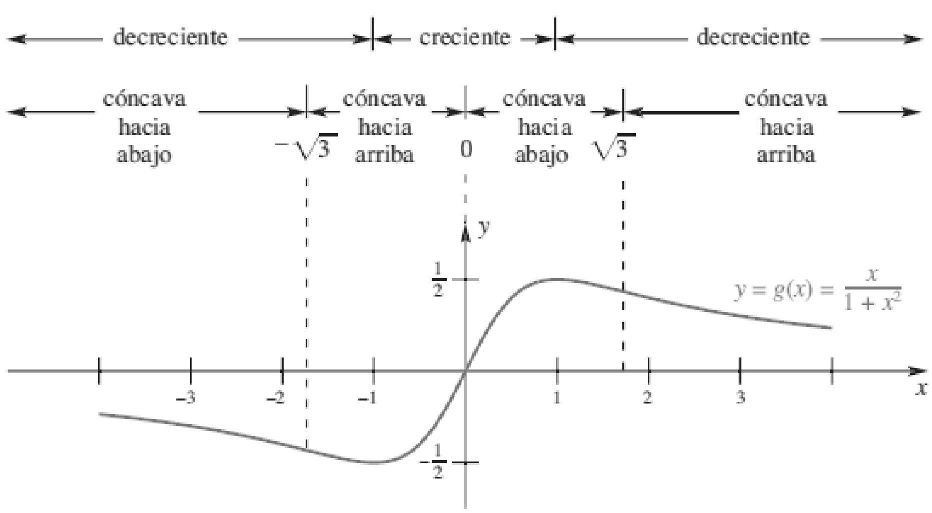
$x_1=0 \quad f'''(0)=\dfrac{-6(x^4-6x^2+1)}{(x^2+1)^4}=-1\neq 0$ *por tanto* $x_1=0$ *es punto de inflexión*

$x_2=\sqrt{3} \quad f'''(\sqrt{3})=\dfrac{-6(x^4-6x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\dfrac{3}{16}\neq 0$ *por tanto* $x_2=\sqrt{3}$ *es punto de inflexión*

$x_3=-\sqrt{3} \quad f'''(-\sqrt{3})=\dfrac{-6(x^4-6x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\dfrac{3}{16}\neq 0$ *por tanto* $x_3=-\sqrt{3}$ *es punto de inflexión*

Entonces la solución es:

MÁXIMO: $\left(1,\frac{1}{2}\right)$
MÍNIMO: $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$
PUNTOS DE INFLEXIÓN: $(0,0)$ $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ y $\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$



EJERCICIOS

1.- Concentración de un Fármaco en la sangre. La concentración (en mg/cc) de un cierto fármaco en el cuerpo de un paciente t horas después de la inyección está dada por: $C(t) = \frac{t^2}{2t^3+1} \quad 0 \le t \le 4$

¿Cuándo aumenta la concentración del medicamento y cuando disminuye?

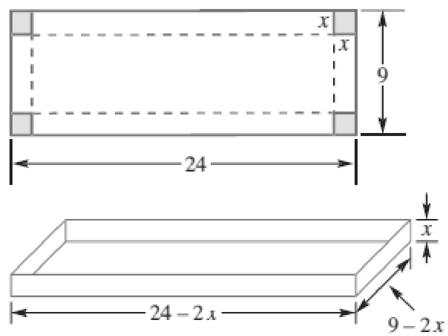
$$C'(t) = \frac{2t(2t^3+1) - t^2(6t^2)}{(2t^3+1)^2} = \frac{2t - 2t^4}{(2t^3+1)^2} = \frac{2t(1-t^3)}{(2t^3+1)^2}$$

$2t(1-t^3) = 0 \ \rightarrow t = 0 \ \ y \ \ t = 1 \ puntos\ críticos\ en\ el\ intervalo\ de\ 0 \le t \le 4$

Entre (0; 1) f crece, entre (1; 4) f decrece, en t = 1 tenemos un máximo.

La concentración aumenta hasta la primera hora, después disminuye.

2.- Una caja rectangular se fabrica con una pieza de cartón de 24 pulgadas de largo por 9 de ancho, de la cual se cortan cuadrados idénticos a partir de las cuatro esquinas y se doblan los lados hacia arriba, como se muestra en la figura. Determine las dimensiones de la caja de volumen máximo. ¿Cuál es este volumen?



Sea **x** el ancho del cuadrado que se cortará y **V** el volumen de la caja resultante. Entonces:

$V(x) = x(24-2x)(9-2x) = 216x - 66x^2 + 4x^3 \qquad 0 \le x \le 4{,}5$

$V'(x) = 216 - 132x + 12x^2 = 12(x^2 - 11x + 18) = 12(x-2)(x-9)$

$puntos\ críticos\text{:} \ \ x = 2 \ y \ \ x = 9 \qquad 2 \in \ 0 \le x \le 4{,}5 \qquad 9 \notin \ 0 \le x \le 4{,}5$

$V''(x) = -132 + 24x = 24(x - 5{,}5)$

$V''(2) < 0 \rightarrow x = 2 \ es\ un\ máximo \qquad V(2) = 200 \ pulgadas\ cúbicas$

Concluimos que la caja tiene un volumen máximo de 200 pulgadas cúbicas si x=2, la caja tendrá las dimensiones: 20 pulgadas de largo, 5 pulgadas de ancho y 2 pulgadas de profundidad.

Tema 5: LA INTEGRAL. APLICACIONES.

Función Primitiva (o Antiderivada). Función primitiva de una función dada $f(x)$, es otra función $F(x)$, cuya derivada es la función dada, $F'(x) = f(x)$. Si una función $f(x)$, tiene primitiva, tiene infinitas primitivas, diferenciándose todas ellas en una constante.

$$[\boldsymbol{F(x) + C}]' = \boldsymbol{F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)}$$

Integral Indefinida: es el conjunto de las infinitas primitivas que puede tener una función.

- ✓ Se representa por $\int f(x)dx$
- ✓ Se lee: integral de $f(x)$ diferencial de x
- ✓ $\int \ Es\ el\ signo\ de\ integración$
- ✓ $f(x)\ es\ el\ integrando\ o\ funcion\ a\ integrar$
- ✓ dx es el diferencial de x, e indica cual es la variable de la función que se integra
- ✓ C es la constante de integración y puede tomar cualquier valor numérico real
- ✓ $Si\ F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ se tiene que: $\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + C}$

Linealidad de la Integral Indefinida.

1.- La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de esas funciones:

$$\int [\boldsymbol{f(x)} \pm \boldsymbol{g(x)}]\boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{f(x)dx} \pm \int \boldsymbol{g(x)dx}$$

2.- La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función:

$$\int \boldsymbol{kf(x)dx} = \boldsymbol{k}\int \boldsymbol{f(x)dx}$$

TABLA DE INTEGRALES

$Sean\ \boldsymbol{a}\ (a > 0),\quad \boldsymbol{n}\ (n \neq -1),\quad \boldsymbol{k}\ y\ \boldsymbol{C}\ (constantes\ reales);\ y\ consideremos\ a\ \boldsymbol{U}\ como\ función$ $de\ \boldsymbol{x}\ y\ \boldsymbol{U'}\ como\ la\ derivada\ de\ \boldsymbol{U}\ \big(U = y = f(x)\big).$

1.- $\int dU = U + C$	**7.-** $\int sen\, U\, dU = -\cos U + C$
2.- $\int k dU = kU + C$	**8.-** $\int \cos U\, dU = sen\, U + C$
3.- $\int U^n dU = \frac{U^{n+1}}{n+1} + C$	**9.-** $\int sec^2\, U\, dU = \tan U + C$
4.- $\int \frac{dU}{U} = ln\lvert U\rvert + C$	**10.-** $\int csc^2\, U\, dU = -ctg\, U + C$
5.- $\int a^U dU = \frac{a^U}{ln\, a} + C$	**11.-** $\int \frac{1}{\sqrt{1-U^2}} dU = sen^{-1}\, U + C$
6.- $\int e^U dU = e^U + C$	**12.-** $\int \frac{1}{1+U^2} dU = tan^{-1}\, U + C$

EJERCICIOS. Determinar las Integrales Inmediatas.

1.- $\int(\boldsymbol{x^4-6x^2-2x+4})\boldsymbol{dx}=\int x^4dx-6\int x^2dx-2\int xdx+4\int dx=\frac{x^{4+1}}{4+1}-6\frac{x^{2+1}}{2+1}-2\frac{x^{1+1}}{1+1}+4x+C$

$=\frac{x^5}{5}-6\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+4x+C=\boldsymbol{\frac{x^5}{5}-2x^3-x^2+4x+C}$

2.- $\int\frac{x^2+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x^2+x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int\left(x^{2-\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{6}}\right)dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{6}}dx=$

$=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1}+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C=\boldsymbol{\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}+C}$

3.- $\int\frac{2^x}{3^x}\boldsymbol{dx}=\int\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]dx=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\boldsymbol{ln}\left(\frac{2}{3}\right)}+\boldsymbol{C}$

4.- $\int\left(\boldsymbol{\cos x+sec^2\,x-\frac{1}{x}}\right)\boldsymbol{dx}=\int\cos x\,dx+\int sec^2\,x\,dx-\int\frac{dx}{X}=\boldsymbol{sen\,x+tan\,x-ln|x|+C}$

Métodos de Resolución de Integrales Indefinidas

1.- **Método de Sustitución**: El método de integración por sustitución o cambio de variable se basa en la derivada de la función compuesta.

$$\int \boldsymbol{f'(U)U'dx=F(U)+C}$$

Para cambiar de variable identificamos una parte de lo que se va a integrar con una nueva variable t, de modo que se obtenga una integral más sencilla. Pasos a seguir:

1.- Se hace el cambio de variable y se diferencia en los dos términos: $t=U$; $dt=U'dx$ se despeja U y dx, sustituyendo en la integral: $\int f'(t)U'\frac{dt}{U'}=\int f'(t)dt$

2.- Si la integral resultante es más sencilla, integramos: $\int f'(t)dt=f(t)+C$

3.- Se vuelve a la variable inicial: $f(t)+C=f(U)+C$

EJERCICIOS.- Calcular las siguientes integrales indefinidas.

1.- $\int\boldsymbol{\frac{2x+3}{x^2+3x+10}dx}$ $\quad t=x^2+3x+10\ \rightarrow dt=(2x+3\,)dx$

$$\int\frac{2x+3}{x^2+3x+10}dx=\int\frac{dt}{t}=ln|t|+C=\boldsymbol{ln\left|x^2+3x+10\right|+C}$$

2.- $\int\boldsymbol{xe^{x^2}dx}$ $\quad t=x^2\ \rightarrow\ dt=2xdx \quad \frac{dt}{2}=xdx$

$$\int xe^{x^2}dx=\int e^t\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int e^tdt=\frac{e^t}{2}+C=\boldsymbol{\frac{e^{x^2}}{2}+C}$$

2.- **Integrales Racionales**: En la integración de funciones racionales se trata de hallar la integral $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, siendo $P(x)\ y\ Q(x)$ polinomios. En primer lugar, supondremos el grado de $P(x)$ menor que el de $Q(x)$ si no fuera así se dividiría: $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int C(x)dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$ donde $C(x)$ es el cociente y $R(x)$ es el resto de la división polinómica. Una vez que sabemos que el denominador es de mayor grado que el numerador, descomponemos el denominador en factores.

__CASO 01__: El denominador tiene solo raíces reales simples. $Q(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots$, la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ puede escribirse así: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-b)}+\frac{C}{(x-c)}+\cdots$ A, B y C son números que se obtienen efectuando la suma e identificando coeficientes o dando valor a x.

__CASO 02__: El denominador tiene solo raíces reales múltiples. $Q(x)=(x-a)^n$, la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ puede escribirse así: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}\cdots\frac{A_n}{(x-a)^n}$.

__CASO 03__: El denominador tiene raíces complejas simples. $Q(x)=ax^2+bx+c$. La fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ puede escribirse así: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$. Esta integral se descompone en una tipo logaritmo y otra tipo arcotangente.

EJERCICIOS.- Calcular las siguientes integrales indefinidas.

1.- $\int\boldsymbol{\frac{2x+3}{x^3+2x^2-5x-6}dx}$

$$\frac{2x+3}{x^3+2x^2-5x-6}=\frac{2x+3}{(x+1)(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}$$

$2x+3=A(x-2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x-2)$

$x = -1 \ \rightarrow\ -2 + 3 = A(-3)(2) + 0 + 0 \ \rightarrow \boldsymbol{A = -\frac{1}{6}}$

$x = 2 \ \rightarrow\ 4 + 3 = 0 + B(3)(5) + 0 \ \rightarrow \boldsymbol{B = \frac{7}{15}}$

$x = -3 \ \rightarrow\ -6 + 3 = 0 + 0 + C(-2)(-5) \ \rightarrow \boldsymbol{C = -\frac{3}{10}}$

$$\int \frac{\boldsymbol{2x+3}}{\boldsymbol{x^3+2x^2-5x-6}}\boldsymbol{dx} = \int \frac{-\frac{1}{6}}{x+1}dx + \int \frac{\frac{7}{15}}{x-2}dx + \int \frac{-\frac{3}{10}}{x+3}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{7}{15}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{3}{10}\int \frac{1}{x+3}dx$$

Ahora resolviendo por el método de sustitución:

$$\int \frac{\boldsymbol{2x+3}}{\boldsymbol{x^3+2x^2-5x-6}}\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{-\frac{1}{6}ln|x+1| + \frac{7}{15}ln|x-2| - \frac{3}{10}ln|x+3| + C}$$

2.- $\int \frac{\boldsymbol{x^2+1}}{\boldsymbol{x^3-2x^2+x}}\boldsymbol{dx}$

$$\frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{x^2+1}{x(x^2-2x+1)} = \frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{(x-1)} + \frac{B_2}{(x-1)^2}$$

$x^2 + 1 = A(x-1)^2 + B_1x(x-1) + B_2x$

$x = 0 \ \rightarrow 0 + 1 = A + 0 + 0 \ \rightarrow\ \boldsymbol{A = 1}$

$x = 1 \ \rightarrow 1 + 1 = 0 + 0 + B_2 \ \rightarrow\ \boldsymbol{B_2 = 2}$

$x = -1 \ \rightarrow 1 + 1 = 4A + 2B_1 - B_2 \ \rightarrow\ 2 = 4 + 2B_1 - 2 \ \rightarrow\ \boldsymbol{B_1 = 0}$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2}{(x-1)^2}dx = ln|x| + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

Resolvemos esta integral por sustitución: $\int \frac{dx}{(x-1)^2} \ \rightarrow\ \ t = x - 1 \ \rightarrow dt = dx$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = -t^{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x-1} + C$$

Ahora:

$$\int \frac{\boldsymbol{x^2+1}}{\boldsymbol{x^3-2x^2+x}}\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{ln|x| - \frac{2}{x-1} + C}$$

3.- $\int \frac{\boldsymbol{x+9}}{\boldsymbol{x^3+x}}\boldsymbol{dx}$

$$\frac{x+9}{x^3+x} = \frac{x+9}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$x + 9 = A(x^2+1) + \ (Bx + C)x$

$x = 0 \ \rightarrow\ \ 9 = A + 0 \ \rightarrow\ \boldsymbol{A = 9}$

$x = 1 \ \rightarrow\ \ 10 = 2A + (B + C) \ \rightarrow\ 10 = 18 + B + C \ \rightarrow\ \boldsymbol{B + C = -8} \ \ (\boldsymbol{1})$

$x = -1 \ \rightarrow\ \ 8 = 2A - (-B + C) \ \rightarrow\ 8 = 18 + B - C \ \rightarrow\ \boldsymbol{B - C = -10} \ (\boldsymbol{2})$

Sumando (1) y (2): $\boldsymbol{B = -9}$

De (1): $C = -8 - B = -8 + 9 = 1 \ \rightarrow\ \boldsymbol{C = 1}$

$$\int \frac{x+9}{x^3+x}dx = \int \frac{9}{x}dx + \int \frac{-9x+1}{x^2+1}dx = 9\int \frac{dx}{x} - 9\int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$\int \frac{x+9}{x^3+x}dx = 9\,ln|x| - 9\int \frac{1}{t}\frac{dt}{2} + tan^{-1}x + C = 9\,ln|x| - \frac{9}{2}ln|t| + tan^{-1}x + C$$

$$\int \frac{\boldsymbol{x+9}}{\boldsymbol{x^3+x}}\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{9\,ln|x| - \frac{9}{2}ln\left|x^2+1\right| + tan^{-1}x + C}$$

3.- **Integrales por Partes**: El método de integración por partes permite calcular la integral de un producto de dos funciones aplicando la fórmula:

$$\int \boldsymbol{UdV = UV - \int VdU}$$

Las funciones logarítmicas, arcos y polinómicas se eligen como U. Las funciones exponenciales y trigonométricas del tipo seno y coseno, se eligen como $\boldsymbol{dV}$.

EJERCICIOS.- Calcular las siguientes integrales indefinidas.

1.- $\int \boldsymbol{x\cos x\,dx} \quad \to \quad U = x,\ \ dU = dx \quad \to \ dV = \cos x\,dx,\ \ V = \int dV = \int \cos x\,dx = sen\,x + C$

$$\int \boldsymbol{x\cos x\,dx} = x\,sen\,x - \int sen\,x\,dx = \boldsymbol{x\,sen\,x + \cos x + C}$$

2.- $\int \boldsymbol{x^3e^xdx} \quad \to U = x^3\ ,\ dU = 3x^2\,dx \quad \to \quad dV = e^xdx,\ \ V = \int e^x\,dx = e^x + C$

$$\int \boldsymbol{x^3e^xdx} = x^3e^x - \int 3x^2\,e^xdx = x^3e^x - 3\int x^2\,e^xdx$$

$$\int x^2\,e^xdx \ \to \ U = x^2\,, dU = 2x\,dx \ \ \to \ \ dV = e^xdx,\ \ V = \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int x^2\,e^xdx = x^2e^x - \int 2xe^xdx = x^2e^x - 2\int xe^xdx$$

$$\int xe^xdx \ \to \ U = x\,, dU = dx \ \ \to \ \ dV = e^xdx,\ \ V = \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int xe^xdx = xe^x - \int e^xdx = xe^x - e^x + C$$

Volviendo a la integral inicial:

$$\int \boldsymbol{x^3e^xdx} = x^3e^x - 3\left[x^2e^x - 2\int xe^xdx\right] = x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^xdx$$

$$\int \boldsymbol{x^3e^xdx} = x^3e^x - 3x^2e^x + 6[xe^x - e^x] + C = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C$$

$$\int \boldsymbol{x^3e^xdx} = \boldsymbol{e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C}$$

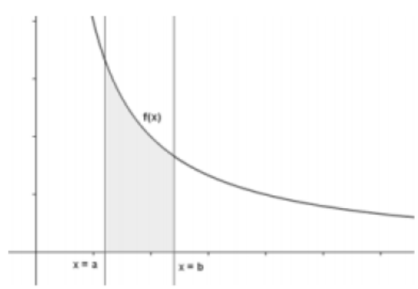
3.- $\int \boldsymbol{x\ln x\,dx} \quad \to U = \ln x\ ,\ dU = \frac{dx}{x} \quad \to \quad dV = xdx,\ \ V = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

$$\int \boldsymbol{x\ln x\,dx} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$$

$$\int \boldsymbol{x\ln x\,dx} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C = \boldsymbol{\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C}$$

Integral Definida

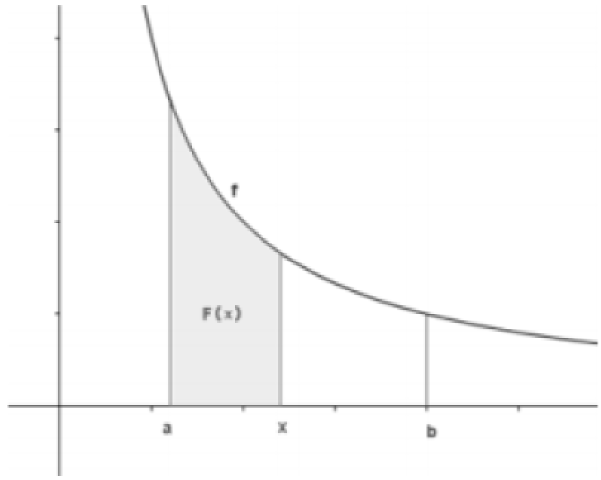
Dada una función $f(x)$ y un intervalo $[a;b]$, la integral definida es igual al área limitada entre las gráfica de $f(x)$, el eje de la abcisas, y las rectas verticales $x = a\ \ y\ \ x = b$.



La integral definida se representa por: $\int_a^b f(x)dx$

- ✓ $\int$ *es el signo de integración*
- ✓ a *es el límite inferior de la integración*
- ✓ b *es el límite superior de la integración*
- ✓ $f(x)$ *es el integrando o función a integrar*
- ✓ dx es el diferencial de x, e indica cual es la variable de la función que se integra

Función Integral: Sea $f(t)$ una función continua en el intervalo $[a;b]$, a partir de esta función se define la función integral: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ que depende del límite superior de integración. Para evitar confusiones cuando se hace referencia es a la variable de F, se le llama x. Geométricamente la función integral, $F(x)$, representa el área del recinto limitado por la curva $y=f(t)$, el eje de la abcisas y las rectas $t=a\ \ y\ \ t=x$.



A la función integral, $F(x)$, tambien se le llama función de áreas de f en el intervalo $[a;\ b]$.

La Regla de Barrow: Dice que la integral definida de la función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a;\ b]$ es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva $F(x)$ de $f(x)$, en los extremos de dicho intervalo.

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx}=[\boldsymbol{F(x)}]\begin{matrix}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\end{matrix}=\boldsymbol{F(b)-F(a)}$$

EJERCICIOS. Resolver las siguientes integrales definidas.

1.- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{sen}\,\boldsymbol{x}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{dx}$

Por sustitución: $t=sen\,x \quad dt=cos\,x\,dx$

$$\int sen\,x\,cos\,x\,dx=\int tdt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{sen^2\,x}{2}+C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{sen\,x\,cos\,x\,dx}=\left[\frac{sen^2\,x}{2}\right]\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\ 0\end{matrix}=\frac{sen^2\frac{\pi}{2}}{2}-\frac{sen^2\,0}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

2.- $\int_0^{\pi} \mathbf{sen}\,\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{e^x dx}$

Por partes: $U=sen\,x \quad dU=cos\,x\,dx \quad \to \quad dV=e^xdx \quad V=\int dV=\int e^xdx=e^x+C$

$$\int sen\,x\,e^xdx=sen\,x\,e^x-\int cos\,x\,e^xdx$$

Por partes: $U=cos\,x \quad dU=-sen\,x\,dx \quad \to \quad dV=e^xdx \quad V=\int dV=\int e^xdx=e^x+C$

$$\int cos\,x\,e^xdx=cos\,x\,e^x+\int sen\,x\,e^xdx$$

$$\int sen\,x\,e^xdx=sen\,x\,e^x-\left(cos\,x\,e^x+\int sen\,x\,e^xdx\right)=sen\,x\,e^x-cos\,x\,e^x-\int sen\,x\,e^xdx$$

$$2\int sen\,x\,e^xdx=sen\,x\,e^x-cos\,x\,e^x+C \;\to\; \int sen\,x\,e^xdx=\frac{sen\,x\,e^x-cos\,x\,e^x}{2}+C$$

$$\int_0^{\pi} \boldsymbol{sen\,x\,e^xdx}=\left[\frac{sen\,x\,e^x-cos\,x\,e^x}{2}\right]\begin{matrix}\pi\\ 0\end{matrix}=\frac{sen\,\pi\,e^{x\pi}-cos\,\pi\,e^{\pi}}{2}-\frac{sen\,0\,e^0-cos\,0\,e^0}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\mathbf{1}$$

3.- $\int_0^4 \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\sqrt{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{dx}$

Haciendo un cambio de variable: $t^2=x \quad \to 2tdt=dx$

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\sqrt{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{dx}=\int \frac{2tdt}{1+t}=2\int \frac{t}{1+t}dt=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2\int dt-2\int \frac{1}{1+t}dt=2t-2\,ln|1+t|+C$$

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\sqrt{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{dx}=2\sqrt{x}-2\,ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C$$

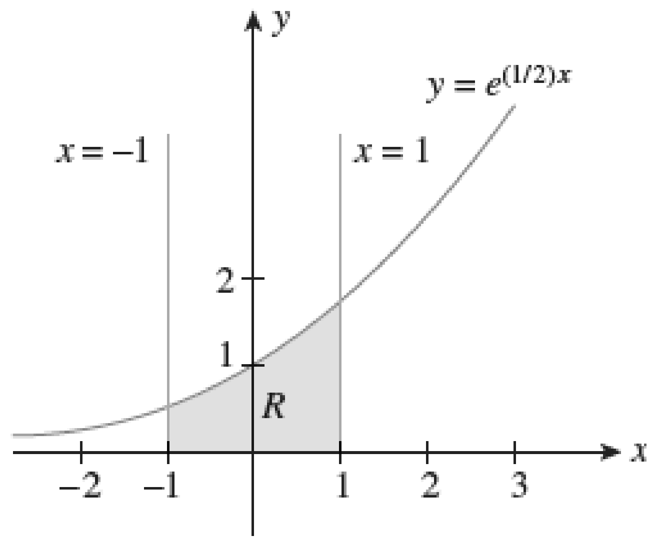
$$\int_0^4 \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\sqrt{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{dx}=2\sqrt{4}-2\,ln\left|1+\sqrt{4}\right|-2\sqrt{0}-2\,ln\left|1+\sqrt{0}\right|=\boldsymbol{4-2\,ln\,3}$$

4.- Hallar el área bajo la función $y = x^2 + 4$ entre las rectas verticales $x = 1$ y $x = 4$.

$$\boldsymbol{Area} = \int_1^4 (x^2+4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 4x\right]_1^4 = \frac{4^3}{3} + 4\cdot 4 - \frac{1^3}{3} - 4\cdot 1 = \frac{64}{3} + 16 - \frac{1}{3} - 4$$

$$\boldsymbol{Area} = \frac{63}{3} + 12 = \frac{99}{3} = \boldsymbol{33\ unidades^2}$$

5.- Determine el área de la región $\boldsymbol{R}$ bajo la curva de $f(x) = e^{x/2}\ \ desde\ x = -1\ \ hasta\ \ x = 1$.



$$\boldsymbol{R} = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{e^{x/2}\ dx} = \int_{-1}^{1} e^{0,5x}\ dx \quad por\ sustitución\ \rightarrow\ t = 0,5x \quad dt = 0,5dx \quad 2dt = dx$$

$$\boldsymbol{R} = \int_{-1}^{1} e^{0,5x}\ dx = \int_{-0,5}^{0,5} 2e^t dt = 2\int_{-0,5}^{0,5} e^t dt = 2[e^t]_{-0,5}^{0,5} = 2(e^{0,5} - e^{-0,5}) \approx \boldsymbol{2,08\ unidades^2}$$

6.- **Concentración de un fármaco en el cuerpo.** La cantidad de cierto fármaco después de que ha sido administrado al cuerpo de un paciente en t días es: $C(t) = 5e^{-0,2t}\ unidades$.

Determine la cantidad promedio del fármaco presente en el cuerpo del paciente por los primeros 4 días después de que se le suministró.

La cantidad promedio del fármaco presente en el cuerpo del paciente por los primeros 4 días después de habérsele suministrado está dada por:

$$\boldsymbol{CPF} = \frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} C(t)dt = \frac{1}{4-0}\int_0^4 5e^{-0,2t}\,dt = \frac{5}{4}\int_0^4 e^{-0,2t}dt$$

$$\int e^{-0,2x}dx \quad por\ sustitución\ \rightarrow\ t = -0,2x \quad dt = -0,2dx$$

$$\int e^{-0,2x}dx = \int e^t \frac{dt}{-0,2} = -5\int e^t dt = -5e^t + C = -5e^{-0,2x} + C$$

$$\boldsymbol{CPF} = \frac{5}{4}\int_0^4 e^{-0,2t}dt = \frac{5}{4}[-5e^{-0,2t}]_0^4 = \frac{5}{4}[-5e^{-0,8} + 5e^0] = \frac{5}{4}[-2,25 + 5,00] \approx \boldsymbol{3,44\ unidades}$$

BIBLIOGRAFIA

- T. M. APOSTOL, Calculus, tomos I y II (1989).
- J. BURGOS, Cálculo Infinitesimal de una Variable (1995).
- B. DEMIDOVICH, 5000 problemas de Análisis Matemático (1980).
- M. SPIVAK, Calculus (1987).
- SOO T. TAN, Matemáticas aplicadas a los negocios, ciencias sociales y de la vida (2012).
- PURCELL VARBERG RIGDON, Cálculo Diferencial e Integral (2007).
- GRANVILLE, Cálculo Diferencial e Integral (2009).